

PROB. STUDIARE IL CARATTERE DI $\int_0^{+\infty} (\cos(\cos x))^x dx$

SOLUZIONE

PRIMA CERCHIAMO DI CAPIRE COME È FATTO IL GRAFICO DELLA FUNZIONE INTEGRANDA.

QUI DI FIANCO ABBIAMO RIPORTATO IL GRAFICO NEGLI INTERVALLI $[2\pi, 4\pi]$, $[22\pi, 24\pi]$, $[102\pi, 104\pi]$ E $[1002\pi, 1004\pi]$ DELLA FUNZIONE INTEGRANDA, IN BLU, E DELLA SOLA BASE (CIDÈ $\cos(\cos x)$) IN GIALLO.

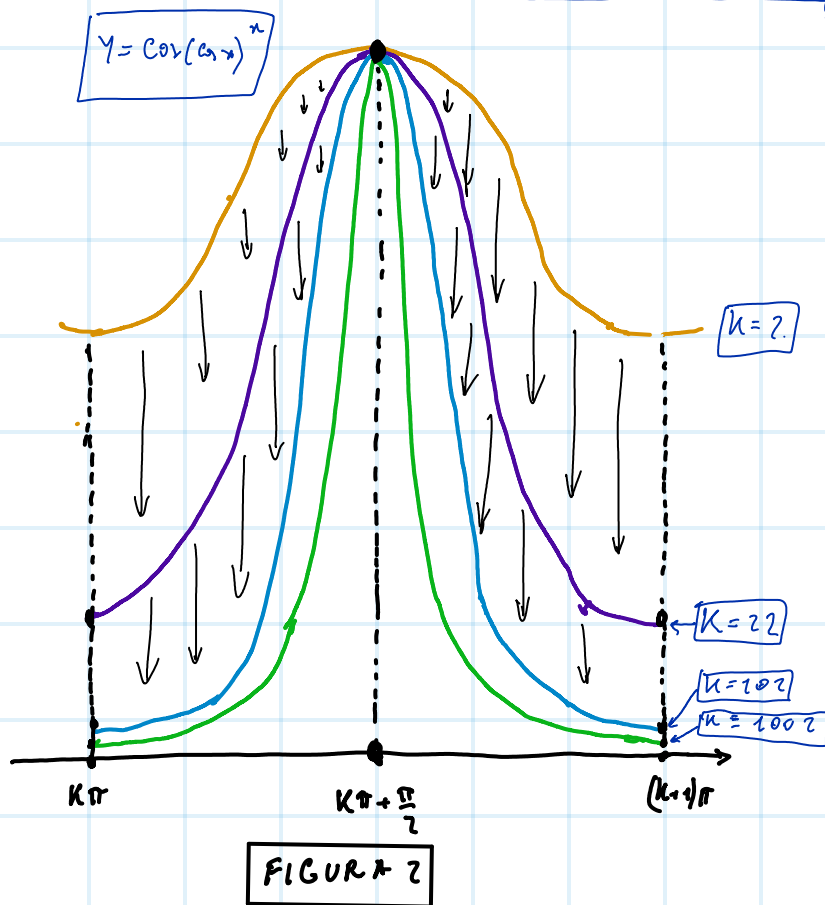
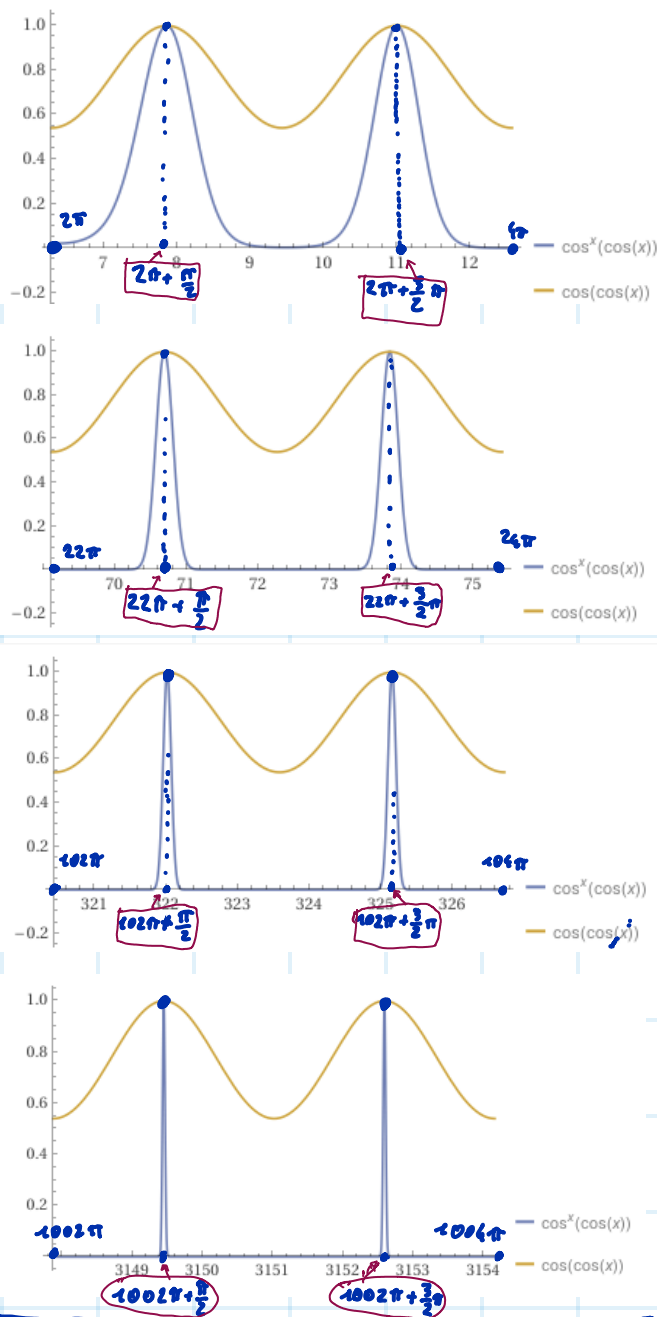
SUCCEDER CHE, QUANDO LA BASE VALE 1, CIDÈ

PER $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$, ELEVARELA AD ESPONENTE x ,

NON NE CAMBIA IL VALORE.

INVECE, NEI PUNTI IN CUI LA BASE ASSUME VALORE STRETTAMENTE COMPRESO TRA 0 E 1, ELEVARELA AD ESPONENTE $x > 1$, NE SCHACCIA IL VALORE SULL'ASSE x , TANTO PIÙ FORTE QUANTO PIÙ GRANDE È L'ESPONENTE (VEDI FIGURA 2)

FIGURA 1



IL GRAFICO È QUINDI UNA SEQUENZA DI PICCHI TUTTI DI ALTEZZA 1, MA SEMPRE PIÙ STRETTI.

SI TRATTA DI CANTARE SE SI RESTAINGONO ABBASTANZA IN FRETTA DAFAR CONVERGERE L'INTEGRALE.

FAREMO VEDERE CHE LA RISPOSTA È NO.

SI HA:

PERCHÉ ESSENDO L'INTEGRANDA POSITIVA, LA FUNZIONE $F(x) = \int_0^x (\cos(\cos t))^x dt$ HA SICURAMENTE LIMITE PER $x \rightarrow +\infty$ E TALE LIMITE, GRAZIE AL T. PONTE COINCIDE CON $\lim_{n \rightarrow +\infty} F(a_n)$ SE $a_n \rightarrow +\infty$

$$(1) \int_0^{+\infty} (\cos(\cos x))^x dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b (\cos(\cos x))^x dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{n\pi} (\cos(\cos x))^x dx =$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} (\cos(\cos x))^x dx$$

MA VALGONO LE STIME:

$$\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} (\cos(\cos x))^x dx \geq \int_{(k-1)\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{k}}^{(k-1)\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{1}{k}} (\cos(\cos x))^x dx \geq$$

$$\geq \int_{(k-1)\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{k}}^{(k-1)\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{1}{k}} \left(\cos\left(\sin\left(\frac{1}{k}\right)\right) \right)^{k\pi} dx =$$

PERCHÉ L'INTEGRANDA È POSITIVA È

$$\left[(k-1)\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{k}, (k-1)\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{1}{k} \right] \subset \left[(k-1)\pi, k\pi \right]$$

$\cos(\cos x)$ È PERIODICA DI PERIODO π PERCHÉ $\cos(\cos(x+\pi)) = \cos(-\cos x) = \cos(\cos x)$ QUINDI

$$\inf \left\{ \cos(\cos x) \mid (k-1)\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{k} \leq x \leq (k-1)\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{1}{k} \right\} = \inf \left\{ \cos(\cos x) \mid \frac{\pi}{2} - \frac{1}{k} \leq x \leq \frac{\pi}{2} + \frac{1}{k} \right\} =$$

$$= \inf \left\{ \cos y \mid \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{k}\right) \leq y \leq \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{k}\right) \right\} = \cos\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{k}\right)\right) = \cos\left(\sin\left(\frac{1}{k}\right)\right)$$

QUINDI SU $\left[(k-1)\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{k}, (k-1)\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{1}{k} \right]$ SI HA:

$$(\cos(\cos x))^x \geq \left(\cos\left(\sin\left(\frac{1}{k}\right)\right) \right)^x \geq \left(\cos\left(\sin\left(\frac{1}{k}\right)\right) \right)^{k\pi}$$

TAYLOR CON
RESTO DI LAGRANGE

$$0 < \xi < \frac{1}{k}$$

$$\cos \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{2k^2} + \frac{\cos(\xi)}{6!} \cdot \frac{1}{k^6} \geq 1 - \frac{1}{2k^2}$$

$$\geq \left(1 - \frac{1}{2k^2}\right)^{k\pi} \cdot \frac{2}{k} \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{k} = \frac{1}{k}$$

$$\text{PERCHÉ } \left(1 - \frac{1}{2k^2}\right)^{k\pi} = \left(1 - \frac{1}{2k^2}\right)^{2k^2 \cdot \frac{\pi}{2k}} = \left(1 - \frac{1}{2k^2}\right)^{2k^2}^{\frac{\pi}{2k}}$$

$$\left(1 - \frac{1}{2k^2}\right)^{2k^2} \geq \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{\pi}{2k}} \rightarrow \left(\frac{1}{e}\right)^0 = 1 > \frac{1}{2}$$

QUINDI (1) DIVENTA:

$$\int_0^{+\infty} (\cos(\cos x))^x dx = \dots = \lim_{b \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} (\cos(\cos x))^x dx \geq \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = +\infty$$

APPENA FAREMO LE SERIE, QUESTO SEGUIRÀ DALLA DIVERGENZA DI $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}$. SENZA LE SERIE INVECE SI PUÒ DIMOSTRARE COSÌ:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \lim_{h \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^h \int_{k-1}^k \frac{1}{[x+1]} dx = \lim_{h \rightarrow +\infty} \int_0^h \frac{1}{[x+1]} dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{[x+1]} dx > \int_0^{+\infty} \frac{1}{x+1} dx = +\infty$$